අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022 (2023)

General Certificate of Education (Adv.Level) Examination, 2022 (2023)

සංයුක්ත ගණිතය I		10	S	I
Combined Mathematics I				

B කොටස

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11 a. $F(x)\equiv ax^2+bx+c; a>0, (a,b,c)\in\mathbb{R}$ වන පරිදි $F(x)=0$ හි මූල α හා β යැයි ගනිමු. $-1<\alpha<1$ බව දී ඇත්නම්, $|a|+b+|c|<0$ බව පෙන්වන්න.

තවද $a=c=1$ වන විට, $f(x)=0$ වර්ගජ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල පැවතීමට b හි අගය සොයන්න.

$a=c=1$ වන විට, මූල එකතුව හෝ ගුණිතය සෙවීමකින් තොරව $\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$ හා $\dfrac{1-\beta}{1+\beta}$ මූලවන වර්ගජ සමීකරණය b ඇසුරෙන් දෙන්න. ඒනයින්, $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$ හා $\dfrac{1+\beta}{1-\beta}$ මූලවන වර්ගජ සමීකරණය අපෝහනය කරන්න.

b. $G(x)$ යනු මාත්‍රය 3 වන බහුපදයක් යැයි ගනිමු. $G(x)$ යන්න, x^2+3 න් බෙදූවිට ශේෂය 7 බවත්, $(2x-k)$ මගින් බෙදූවිට ද ශේෂය 7 බවත් දී ඇත. මෙහි k යනු නිර්ණය කළ යුතු නියතයකි. G ශ්‍රිතයෙහි 0 හා 2 ට අදාල ප්‍රතිබිම්බ පිළිවෙලින් 10 හා -14 බව දී ඇත්නම්, $G(x)$ සොයන්න. දැන් $G(x)$ යන්න, $(x-1)$ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස ප්‍රකාශ කරන්න. ඒනයින්, $g(x)$ යන්න (x^2-2x+1) මගින් බෙදූවිට ලබ්ධිය හා ශේෂය අපෝහනය කරන්න.

12 a. තරුණ කාන්තාවන් හතර දෙනෙකු, වයසක කාන්තාවන් තුන් දෙනෙකු, තරුණ පිරිමින් තුන් දෙනෙකු හා වයසක පිරිමින් හතර දෙනෙකු සිටින සමූහයක් අතුරෙන් අට දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් සෑදිය යුතුව තිබේ.

i. තරුණ හා වයසක අය සම සමව සිටින සේත්, කාන්තාවන් හා පිරිමින් සම සමව සිටින සේත් කමිටුව නිර්මාණය කළ යුතුව තිබේ නම්, මෙසේ සෑදිය හැකි කමිටු ගණන කීයද?

ii. **උපරිම වශයෙන්** කාන්තාවන් දෙදෙනෙකු හා **උපරිම වශයෙන්** තරුණ පිරිමින් දෙදෙනෙකු සිටින පරිදි සෑදිය හැකි කමිටු ගණන කීයද?

b. $\frac{16}{4\cdot7\cdot10}+\frac{19}{7\cdot10\cdot13}+\frac{22}{10\cdot13\cdot16}+\dots$ ශ්‍රේණියේ r වන පදය $U_r; r\in\mathbb{Z}^+$ ලියා දක්වන්න. දැන් $\frac{U_r}{V_r}=2^r$ යැයි ගනිමු. $r\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $V_r=f(r-1)-f(r)$ වන පරිදි $f(r)$ ශ්‍රිතයක් සොයන්න.

එනයින්, $\sum_{r=1}^{n}V_r=\frac{1}{28}-\frac{1}{2^n(an+b)(an+c)}$; $(a,b,c)\in\mathbb{Z}^+, b<c$ වන පරිදි a,b හා c නියත අගයන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty}V_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

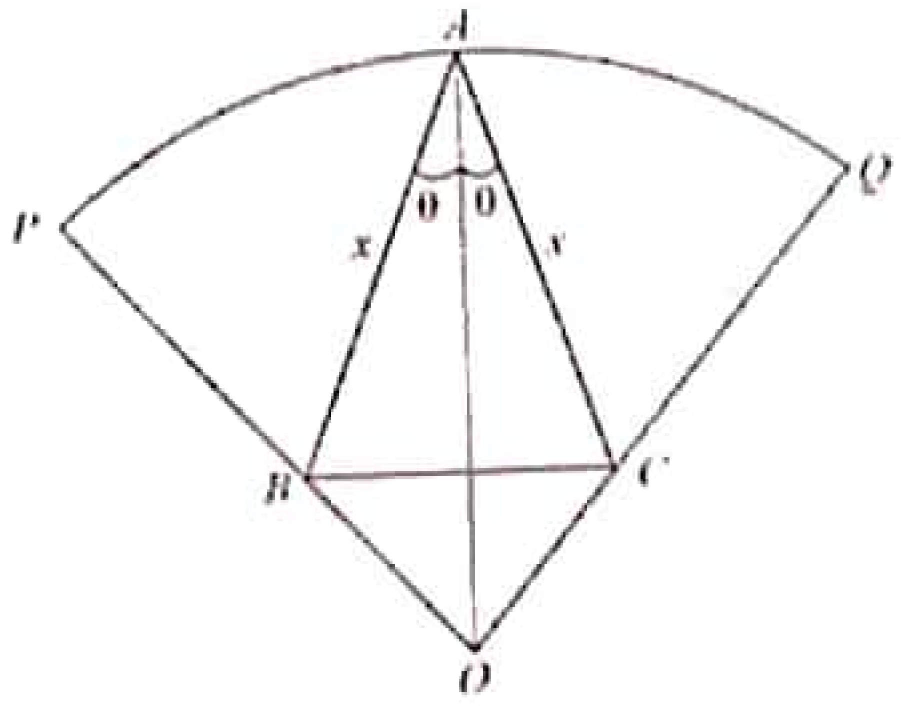
13.a. $a,b\in\mathbb{R}$ වන පරිදි $A=\begin{pmatrix}4&b\\3&a\end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. $4a=3b$ වන විට, A හි ප්‍රතිලෝම න්‍යාසය A^{-1} **නොපවතින** බව පෙන්වන්න. $4a\neq3b$ වන පරිදි, $A=A^{-1}$ වන බව දී ඇත්නම් $a=-4$ බවත්, $b=-5$ බවත් පෙන්වන්න. **එනයින්,** $BC=O$ වන පරිදි ගණය 2×2 වූද, **නිශ්ශූන්‍යය** වූද B හා C න්‍යාස යුගල සොයන්න.

b. $A\equiv\{z\in\mathbb{C}:|z|\le4\}$ ද, $B\equiv\left\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\left(\frac{z-1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)\ge0\right\}$ ද, $C\equiv\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(z)\ge0\}$ ද වන පරිදි A,B හා C සංකීර්ණ කුලක අර්ථ දක්වා තිබේ. A,B හා C කුලක මගින් දැක්වෙන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා වලට අදාල පෙදෙස් එකම ආගන්ඩ් තලයක අනුරේඛණය කරන්න. **එනයින්,** $A\cap B\cap C$ ට අදාල පෙදෙස අඳුරු කර දක්වන්න.

c. z යනු **නිශ්ශූන්‍යය** සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. $|z|^2=z\bar{z}$ බව හා $|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z_2})$ බව පෙන්වන්න. **එනයින්,** $|z_1-z_2|^2$ සඳහා ද එවැනිම ප්‍රකාශයක් ලබා ගන්න. $\left|\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right|=1$ වන බව දී ඇත්නම්, $\frac{z_1}{z_2}$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව **හුදෙක් අතාත්වික** බව පෙන්වන්න.

14.a. a,b තාත්ත්වික නියත වන පරිදි, $x\neq0$ සඳහා $f(x)=\frac{a+bx^2}{2x^4}$ යැයි ගනිමු. $x\neq0$ සඳහා $f(x)$ හි පළමු ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)=\frac{x^2-4}{x^5}$ වන පරිදි a හා b අගයන්න. **එනයින්,** $f(x)$ වැඩිවන ප්‍රාන්තර හා $f(x)$ අඩුවන ප්‍රාන්තර සොයන්න. $f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යවල ඛණ්ඩාංකද සොයන්න. $x\neq0$ සඳහා $f''(x)=\frac{-3x^2+20}{x^6}$ බව දී ඇත. $y=f(x)$ ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යවල **ජාටික** සොයන්න. **එනයින්,** $f(x)$ උඩු අවතල වන ප්‍රාන්තර හා යටි අවතල වන ප්‍රාන්තර සොයන්න. ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y=f(x)$ හි දළ සටහනක් අඳින්න.

b. වර්ගඵලය $\frac{\pi^3}{4}$ ක් වූ $OPQO$ වෘත්ත පාදකයක් තුළ යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි **සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක්** අන්තර්ගත කර තිබේ. $AB=AC=x$ බවත්, $B\hat{A}C=2\theta$ බවත්, BC පාදය තිරස්ව පිහිටන බවත් දී ඇත්නම්, $x=\frac{\pi}{(\sin\theta+\cos\theta)}$ බව හා ABC සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය A යන්න $A=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{\sin 2\theta}{1+\sin 2\theta}$ මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. **එනයින්**, ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය උපරිම වන θ අගය සොයා එම උපරිම වර්ගඵලය වර්ග ඒකක $\frac{\pi^2}{8}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.



15.a. සියලු $x\in\mathbb{R}$ සඳහා
$-8x^3+20x^2-18x+7\equiv A(2x-1)(4x^2-4x+3)+(Bx+C)(4x^2-4x+3)+C(2x-1)^2$ වන පරිදි A,B හා C නිඛිල සොයන්න. **එනයින්**, $\frac{-8x^3+20x^2-18x+7}{(2x-1)^2(4x^2-4x+3)}$ භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා $\int\frac{-8x^3+20x^2-18x+7}{(2x-1)^2(4x^2-4x+3)}.dx$ සොයන්න.

b. $\frac{d\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right)}{dx}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; බව පෙන්වන්න. **එනයින්**, $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$ සොයන්න.

දැන්, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ සඳහා $I=\int\sqrt{\tan x}.dx$ හා $J=\int\sqrt{\cot x}.dx$ යැයි ගනිමු. $(\sin x-\cos x)=u$ ආදේශය භාවිතයෙන් හෝ අන්ක්‍රමයකින් හෝ $I+J=\sqrt{2}\sin^{-1}(\sin x-\cos x)+C$ බව පෙන්වන්න. මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි. සුදුසු ආදේශයක් භාවිතයෙන්, $I-J$ සඳහා ද එවැනි ම ප්‍රකාශනයෙන් ලබා ගන්න. **එනයින්**, I හා J සොයන්න.

$a<b,(a,b)\in\mathbb{R}$ වන පරිදි වූ $\int_a^b f(x)\cdot dx=\int_a^b f(a+b-x)\cdot dx$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න. **එනයින්**, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan x}\cdot dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\cot x}\cdot dx$ බව අපෝහනය කර, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\tan x}\cdot dx=\sqrt{2}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

c. **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය,** භාවිතයෙන් හෝ $\int\sec^3 x\cdot dx=\frac{1}{2}\sec x\tan x+\frac{1}{2}\ln|\sec x+\tan x|+C$ බව පෙන්වන්න. මෙහි C යනු නියතයකි. **එනයින්**, $\int\sqrt{9x^2-12x+13}\cdot dx$ සොයන්න.

16. $l_1 \equiv kx - y + 1 = 0; k \in \mathbb{Z}^+$ හා $l_2 \equiv x - 2y + 3 = 0$ යැයි ගනිමු.

$l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ සරල රේඛා, ඛණ්ඩාංක අක්ෂ ඡේදනය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරනු ලබන වෘත්තය $S = 0$ යැයි ගනිමු. S සොයා එම $S = 0$ වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය හා අරය ලබාගන්න. තවද k හි අගය ද සොයන්න.

ඉහත k හි අගය සඳහා $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය A සොයන්න. A ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් ඉහත වෘත්තයට වූ ස්පර්ශක ජ්‍යායෙහි සමීකරණය $5x + y = 0$ බව පෙන්වන්න.

$k \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ සරල රේඛා යුගලෙහි කෝණ සමච්ඡේදක වල සමීකරණ සොයා මහා කෝණි සමච්ඡේදකයෙහි සමීකරණය **අපෝහනය** කරන්න.

ඉහත මහා කෝණ සමච්ඡේදකය මත කේන්ද්‍රය පිහිටියා වූද, $l_1 = 0$ හා $l_2 = 0$ සරල රේඛා ස්පර්ශ කරන්නා වූද, අරය ඒකක $\sqrt{5}$ ක් වූද **වෘත්ත දෙකක් පවතින** බව පෙන්වන්න. ඒවායින් එකක් $S_1 \equiv x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ බව පෙන්වා අනෙක් වෘත්තය $S_2 = 0$ නම්, S_2 සොයන්න.

දැන් $P \equiv (-1,1)$ යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යය $S_1 = 0$ වෘත්තයට **බාහිරින්** පිහිටන බව පෙන්වන්න. තවද P හි සිට $S_1 = 0$ වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක වල සමීකරණ $2x + y + 1 = 0$ හා $x - 2y + 3 = 0$ බව පෙන්වන්න.

17.a. $\sin A \cdot \sin B \cdot \cos A$ හා $\cos B$ පද ඇසුරෙන් $\sin(A+B)$ ලියා දක්වන්න. **ඒනයින්,** $\sin(A-B)$ සඳහා ද එවැනිම ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \equiv \cos A$ බවත්,

$\sin(A-B) \cdot \sin(A+B) \equiv \sin^2 A - \sin^2 B$ බවත්, **අපෝහනය** කරන්න. තවදුරටත්,

$\cos 10^0 \cdot \cos 30^0 \cdot \cos 50^0 \cdot \cos 70^0 = \frac{3}{16}$ අපෝහනය කරන්න.

b. $T(x) \equiv 2 + \sin x\left(\sqrt{3}\cos x - 2\sin x\right)$ යැයි ගනිමු. $T(x)$ යන්න, $T(x) \equiv A + B\cos(2x - \alpha)$ වන පරිදි ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි A, B හා $\alpha; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ යනු නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියත වෙයි.

T ශ්‍රිතයේ **පරාසය** සොයා, $\left[\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$ වසම තුළ $y = T(x)$ ප්‍රස්තාරය අඳින්න. තවදුරටත් ඉහත වසම තුළ $T(x) = 2$ සමීකරණය විසඳන්න.

c. ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සුපුරුදු අංකනයෙන්, sin නීතිය ප්‍රකාශ කර cos නීතිය **අපෝහනය** කරන්න. **ඒනයින්, හෝ අනුක්‍රමයකින් හෝ** $\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(a+b+c)(b+c-a)} \equiv \tan^2\left(\frac{A}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.